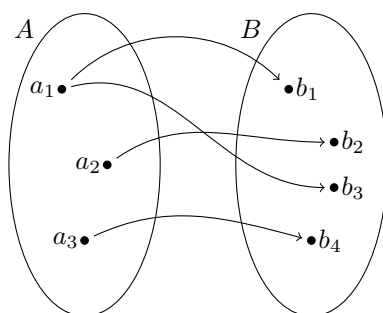


Matematica generale: esonero dell'8 novembre 2011

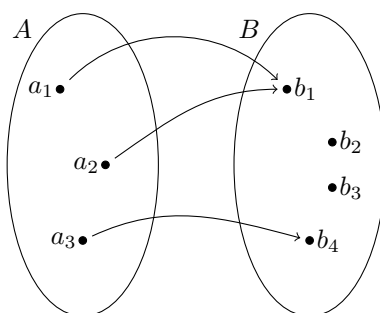
Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

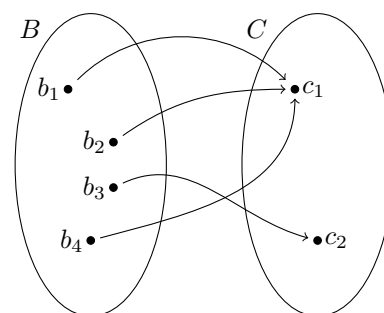
1. Siano f , g e h come nella figura che segue:



$f : A \rightarrow B$



$g : A \rightarrow B$



$h : B \rightarrow C$

- (a) Dire quali tra f , g e h non sono funzioni, e perché.
(b) Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
(c) Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
(d) Si può fare la composizione $h \circ g$ tra g ed h ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.
2. Risolvere la disequazione fratta $\frac{x^2 - 6x + 4}{3 - x} - 4 \leq 0$.
3. Siano f , g e h definite come segue:

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 6x + 4}{3 - x} - 4 \right), \quad g(x) = (\sqrt{-x})^4, \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \ln(6x + 2) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Determinare il dominio di f , g e h .
(b) Determinare l'immagine di g .
(c) Dire se esiste l'inversa di g , e se si calcolarla.
(d) Dire se si può fare la composizione $f \circ g$, e se si calcolarla.
(e) Dire se esiste, e se esiste calcolare:
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x).$
(f) Dire se h è una funzione continua. Se non lo è, dire per quali valori di x non è continua e perché.
(g) [opzionale] Se nella definizione di h sostituiamo $x \leq 0$ con $x < 0$, h è continua?
4. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.

5. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n}$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.